**Лабораторная работа № 5**

**E6.1** Является ли операция переноса матрицы линейным преобразованием?

**E6.2**. Рассмотрим снова нейронную сеть, показанную на рисунке P6.1. Покажите, что, если вектор смещения b равен нулю, сеть выполняет линейную операцию.

**E6.3**. Рассмотрим линейное преобразование, показанное на рисунке E6.1.

1. Найти матричное представление этого преобразования относительно стандартного базисного множества.
2. Найти матрицу этого преобразования относительно базисного множества {v1, v2}.

(Смотри рисунок в книге!)

Рисунок E6.1 Пример трансформации для упражнений E6.3

**E6.4.** Рассмотрим пространство комплексных чисел. Пусть это векторное пространство X, и пусть базис для X {1 + j, 1 - j}. Пусть A: X ->X - операция умножения на (1 + j) ( A(x) = (1 + j)x).

1. Найти матрицу преобразования A относительно заданного выше базиса
2. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования
3. Найти матричное представление A по отношению к собственным векторам в качестве базисных векторов
4. Проверьте свои ответы на части (ii) и (iii) с помощью MATLAB.

**E6.5.** Рассмотрим преобразование из пространства многочленов второго порядка в пространство многочленов третьего порядка, которое определяется следующим образом:

x = a0 +a1t + a2t2,

A(x) = a0(t + 1) + a1(t + 1)2  + a2t + 1)3.

Найти матричное представление этого преобразования относительно базисных множеств V2 = {1, t, t2}, V3 = {1, t, t2, t3}.

**E6.6.** Рассмотрим векторное пространство многочленов степени два или меньше. Эти многочлены имеют вид f(t) = a0 + a1t + a2t2. Теперь рассмотрим преобразование, в котором переменная t заменена t + 1. (Например, t2 + 2t + 3 => (t + 1)2 + 2(t + 1)+ 3 = t2 + 4t + 6

1. Найти матрицу этого преобразования по отношению к базисному множеству {1, t – 1, t2}.
2. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования. Покажите собственные векторы как столбцы чисел и как функции времени (полиномы).

**E6.7**. Рассмотрим пространство функций вида αsin(t + β). Один базис, установленный для этого пространства имеет вид V = {sin(t), cos(t)}. Рассмотрим преобразование дифференцирования D.

1. Найти матрицу преобразования D относительно базисного множества V.
2. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования. Покажите собственные векторы как столбцы чисел и как функции от t.
3. Найти матрицу преобразования по отношению к собственным векторам в качестве базисных векторов.

**E6.8**. Рассмотрим векторное пространство функций вида α + βe2t. Одно базисное множество для этого векторного пространства имеет вид V = {1 + e2t, 1 - e2t}. Рассмотрим преобразование дифференцирования D.

1. Найти матрицу преобразования D относительно базисного множества V, используя уравнение Eq. (6.6).
2. Проверьте действие матрицы на функцию 2e2t.
3. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования. Покажите собственные векторы как столбцы чисел (по отношению к базисному множеству V) и как функции от t.
4. Найти матрицу преобразования по отношению к собственным векторам в качестве базисных векторов.

**E6.9**. Рассмотрим множество всех 2x2-матриц. Это множество является векторным пространством, которое мы будем называть X (да, матрицы могут быть векторами). Если M - элемент этого векторного пространства, определим преобразование A: X->X, такое, что A(M) = M + MT. Рассмотрим следующее базисное множество для векторного пространства X.

v1 = [1 000], v2 = [0 100], v3 = [0 010], v4 = [0 001]

1. Найти матричное представление преобразования A относительно базового множества {v1, v2, v3, v4}(как для домена, так и для диапазона) (используя уравнение Eq. (6.6)).
2. Проверьте работу матричного представления из части i на элементе X, приведенном ниже. (Убедитесь, что матричное умножение дает тот же результат, что и преобразование)

[1 201]

1. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования. Вам не нужно использовать представление матрицы, которое вы нашли в части i. Вы можете найти собственные значения и собственные векторы непосредственно из определения преобразования. Ваши собственные векторы должны быть 2x2-матрицами (элементами векторного пространства X). Это не требует больших вычислений. Используйте определение собственного вектора в уравнении Eq. (6,46).

**E6.10.** Рассмотрим преобразование из пространства полиномов первой степени в пространство полиномов второй степени. Преобразование определяется следующим образом

A(a + bt) = at + b/2t2

(т.е. A(2 + 6t) = 2t + 3t2). Одним базисным множеством для P1 является U = {1, t}. Другим базисным множеством для P2 – V = {1, t, t2}.

1. Найти матричное представление преобразования A относительно базисных множеств U и V, используя уравнение Eq. (6.6).
2. Проверьте работу матрицы на полиноме 6 + 8t. (Убедитесь, что матричное умножение дает тот же результат, что и преобразование).
3. Используя преобразование подобия, найдем матрицу преобразования относительно базисных множеств S = {1 + t, 1 - t} и V.

**E6.11.** Пусть D - оператор дифференцирования D(f) = df/dt и воспользуемся базисным множеством

{u1, u2} = {e5t, te5t}

как для области, так и для диапазона преобразования D.

1. Показать, что преобразование D линейно.
2. Найти матрицу этого преобразования по сравнению с приведенным выше базисом.
3. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования D.

**E6.12**. Некоторое линейное преобразование имеет следующие собственные значения и собственные векторы (представленные в терминах стандартного базисного множества):

{z1 = [1 2]T, λ1 = 1}, {z2 = [-1 2]T, λ2 = 2}

Найти матричное представление преобразования относительно стандартного базисного множества.

1. Найти матричное представление преобразования относительно собственных векторов в качестве базисных векторов.

**E6.13**. Рассмотрим преобразование A: R2 -> R2. На рисунке ниже показан набор базисных векторов V = {v1, v2} и преобразованных базисных векторов.

(См. рисунок в книге!)

Рисунок E6.2 Определение трансформации для упражнений E6.13

1. Найти матричное представление этого преобразования по базисным векторам V = {v1, v2}.
2. Найти матричное представление этого преобразования по отношению к стандартным базисным векторам.
3. Найти собственные значения и собственные векторы этого преобразования. Нарисуйте собственные векторы и их преобразования.
4. Найти матричное представление этого преобразования по собственным векторам в качестве базисных векторов.

**E6.14**. Рассмотрим векторные пространства P2 и P3 многочлены второго порядка и третьего порядка. Найти матричное представление интегрирующего преобразования I: P2 -> P3 относительно базисных множеств V2 = {1, t, t2}, V3 = {1, t, t2, t3}.

**E6.15**. Некоторое линейное преобразование A: R2 -> R2 имеет матричное представление относительно стандартного базисного множества

A = [1 23 4].

Найти матричное представление этого преобразования относительно нового базисного множества:

V = {[1 3]T, [2 5]T}.

**E6.16**. Мы знаем, что некоторое линейное преобразование имеет собственные значения и собственные векторы, заданные формулой

λ1 = 1 z1 = [1 1]T λ2 = 2 z2 = [1 2]T .

(Собственные векторы представлены относительно стандартного базисного множества..)

1. Найти матричное представление преобразования A относительно стандартного базисного множества.
2. Найти матричное представление относительно нового базиса

V = {[1 1]T, [-1 1] T }.

E6.17. Рассмотрим преобразование A, созданное проецированием вектора x на строку, показанную на рисунке E6.3. Пример преобразования показан на рисунке.

(Смотри рисунок E6.3 в книге!)

1. Используя уравнение Eq. (6.6), найти матричное представление этого преобразования относительно стандартного базисного множества {s1, s2}.
2. Используя ваш ответ на часть i, найдите матричное представление этого преобразования относительно базового набора {v1, v2}, показанного на рисунке E6.3.

**E6.18** Рассмотрим следующее базисное множество для R2:

V = {v1, v2} = {[1 -1]T, [1 -2] T }.

(Базисные векторы представлены относительно стандартного базисного множества.)

1. Найти соответствующие базисные векторы для этого базисного множества.
2. Рассмотрим преобразование A: R2 -> R2. Матричное представление A относительно стандартного базиса в R2 есть

A = [0 1-2 -3].

Найти разложение Av1 в терминах базисного множества V. (Используйте соответствующие базисные векторы.)

1. Найти разложение Av2 в терминах базисного множества V.
2. Найти матричное представление A относительно базиса V. (Этот шаг не требует дополнительных вычислений.)